

# Naive Diversifikation am deutschen Aktienmarkt

– Eine empirische Retrospektive –

Jon Sverre Hellevik / Ralf Herrmann

Diskussionspapier Nr. 193

Stand: Mai 1996

## Zusammenfassung

Ausgehend von einem Wertpapiersample von 161 Wertpapieren, die im Zeitraum von 1974 bis 1994 im amtlichen Marktsegment der Frankfurter Börse gehandelt wurden, werden Veränderungen der Korrelationsstruktur zwischen den einzelnen Wertpapieren im Zeitablauf untersucht. Insbesondere wird der systematische und unsystematische Risikoanteil in Abhängigkeit von Portfoliogröße und Periode quantifiziert. Es zeigt sich, daß sich der systematische Risikoanteil im Betrachtungszeitraum mehr als vervierfacht, während sich der unsystematische Anteil nur knapp verdoppelt. Es wird weiter untersucht, welcher Anteil des Portfoliorisikos sich innerhalb des Samples diversifizieren läßt und bis zu welcher Portfoliogröße durch Hinzunahme eines zusätzlichen Wertpapiers noch eine ökonomisch signifikante Risikoreduktion erreicht werden kann.

Rückfragen und Kommentare an folgende Adresse:  
Institut für Entscheidungstheorie und Unternehmensforschung  
Universität Karlsruhe (TH)  
Postfach 69 80  
76 128 Karlsruhe  
Tel. 0721/608-6033  
Fax 0721/35 92 00

# 1 Einleitung

Die moderne Portfoliotheorie geht auf Markowitz[1952,1959] zurück. Er weist als erster theoretisch nach, daß es durch Streuung über verschiedene Wertpapiere möglich ist, ohne Reduktion der erwarteten Rendite das Anlagerisiko zu reduzieren. Im weiteren soll dieser Diversifikationseffekt innerhalb nationaler Aktienportfolios betrachtet werden. Besteht Konsens über die Vorteilhaftigkeit der Risikostreuung bei der Geldanlage in Aktien, besteht dennoch Uneinigkeit über die Anzahl der Wertpapiere, die benötigt werden, um eine optimale Risikoreduktion zu erreichen. Während einige Autoren die optimale Portfoliogröße bei 8-10 Wertpapieren sehen, weisen andere Untersuchungen auch für umfangreichere Portfolios noch signifikante Risikoreduktionen nach.

Die erste empirische Untersuchung, die sich mit dem Diversifikationseffekt befaßt, ist die Untersuchung von Evans/Archer[1968]. Sie stellen fest, daß die durchschnittliche Risikoreduktion schon bei 8 bis 10 Wertpapieren nicht mehr statistisch signifikant ist. Zu einem ähnlichen Ergebnis gelangen auch Wagner/Lau[1971], die den Einfluß des Aktien-Ratings auf das Portfoliorisiko analysieren. Klemkosky/Martin[1975] untersuchen den Einfluß des Betafaktors auf die Diversifikationswirkung mit dem Ergebnis, daß in High-Beta-Portfolios mehr Wertpapiere benötigt werden, um das gleiche unsystematische Risikoniveau zu erreichen wie in Low-Beta-Portfolios. Sie erhalten statistisch signifikante Risikoreduktionen in High-Beta-Portfolios bis zu einer Größe von 14 Wertpapieren. Tole[1982] erhält in Portfolios basierend auf Anlageempfehlungen bestehend aus 15 – 40 Wertpapieren noch eine statistisch signifikante durchschnittliche risikoreduzierende Wirkung.

Gleichzeitig weist er aber auch darauf hin, daß als Risikomaß nicht nur die erwartete Varianz für eine Portfoliogrößenklasse, sondern ebenso die Streuung der Varianz um ihren Erwartungswert betrachtet werden sollte. Auf die Relevanz der Streuung der Varianz weisen auch Elton/Gruber[1977] hin. Darüberhinaus kritisieren sie, daß ein Risikomaß nicht nur die Portfoliorenditenvarianz, sondern auch die erwartete Abweichung der Portfoliorendite von der durchschnittlichen Marktrendite berücksichtigen sollte<sup>1</sup>. Im Gegensatz zu früheren Studien, die auf Simulationen beruhen, leiten Elton/Gruber in ihrer Arbeit exakte analytische Lösungen für den Zusammenhang zwischen Portfoliogröße und Risiko ab und weisen ausgehend von ihren Lösungen, wie auch Bird/Tippet[1986], auf die Fehlspezifikation der Schätzgleichungen in den vorangegangenen Simulationsstudien hin. Sie zeigen, daß auch in Portfolios mit mehr als 15 Wertpapieren durch Aufnahme weiterer Wertpapiere noch eine ökonomisch signifikante Risikoreduktion erzielt werden kann.

Für den deutschen Aktienmarkt existiert nur eine Untersuchung von Keeding[1976]. Er stellt risikoreduzierende Effekte für Portfolios bis zu einer

---

<sup>1</sup>Ein ähnliches Risikomaß wird auch schon von Fisher/Lorie[1970] verwendet.

Größe von 14 Wertpapieren fest. Neuere Untersuchungen liegen von Allen/Sugianto[1993] für den australischen und von Poon/Taylor/Ward[1992] für den britischen Aktienmarkt vor. Letztere Untersuchung analysiert auch die zeitliche Stabilität des Diversifikationseffektes und gelangt zum Ergebnis, daß der diversifizierbare Risikoanteil in Portfolios starken zeitlichen Schwankungen unterliegt.

Das Ziel der vorliegenden Untersuchung ist es, das Risiko deutscher Aktienportfolios anhand verschiedener Kennzahlen in Abhängigkeit von der Portfoliogröße zu quantifizieren und deren Risikostruktur zu analysieren. Desweiteren soll die zeitliche Stabilität der Diversifikationswirkung untersucht werden.

## 2 Daten und Methodik

### 2.1 Daten

Sämtliche in der Untersuchung verwendeten Daten stammen aus der Karlsruher Kapitalmarkt-Datenbank<sup>2</sup> (KKMDB). Der Untersuchungszeitraum erstreckt sich vom 1. Januar 1974 bis 31. Dezember 1994. Der Gesamtzeitraum wird in 17 überlappende Teilperioden mit einer Länge von jeweils fünf Jahren unterteilt. Die Grundlage der Untersuchung bilden wöchentliche, bereinigte<sup>3</sup> Aktienrenditen.

Als Marktindex wurde der DAFOX-GG<sup>4</sup>, als gleichgewichteter Performance-Index verwendet, der das gesamte amtliche Marktsegment des Frankfurter Aktienmarktes umfaßt.

Um die Vergleichbarkeit der Ergebnisse für die verschiedenen Perioden und mit früheren Untersuchungen zu gewährleisten, wurde das Wertpapiersample aus allen Wertpapieren zusammengestellt, die im Gesamtzeitraum im amtlichen Marktsegment der Frankfurter Börse gehandelt wurden und für die vollständige Kurszeitreihen vorliegen. Insgesamt basiert die Untersuchung auf 174.504 wöchentlichen Aktienrenditen.

### 2.2 Methodik

In der Untersuchung wird die Risikostruktur von gleichgewichteten<sup>5</sup> Portfolios betrachtet. Die methodische Grundlage für die vorliegende Untersuchung bil-

---

<sup>2</sup>Vgl. Bühler/Göppel/Möller[1993].

<sup>3</sup>Vgl. Sauer[1991].

<sup>4</sup>Vgl. Göppel/Schütz[1994].

<sup>5</sup>Die Betrachtung von gleichgewichteten Portfolios ist aus der Sicht eines Investors, der keine Informationen über zukünftige Verteilungsparameter der Wertpapierrenditen hat, optimal (vgl. Elton/Gruber[1977], S.417).

det die von Elton/Gruber entwickelte analytische Methode zur Untersuchung von Diversifikationseffekten. Diese wird im folgenden kurz dargestellt. Als Risikomaß wird dabei die Varianz der Portfoliorenditen verwendet. Für die erwartete Renditevarianz<sup>6</sup> eines gleichgewichteten Portfolios mit n Wertpapieren, zufällig aus einem Wertpapiersample bestehend aus m Wertpapieren ausgewählt, und die Streuung<sup>7</sup> der Varianz innerhalb einer Größenklasse gilt:

$$E[\sigma_n^2] = \frac{1}{n}\sigma^2 + \frac{n-1}{n}\overline{cov(i,j)} \quad (1)$$

und

$$\begin{aligned} \sigma^2(\sigma_n^2) &= \frac{1}{n^3} \left[ \left(1 - \frac{n-1}{m-1}\right) \sigma_{\sigma_i^2}^2 \right. \\ &+ 2(n-1) \left(1 - \frac{(n-2)(n-3)}{(m-2)(m-3)}\right) \overline{cov(i,j)^2} \\ &- n(n-1)^2 \left(1 - \frac{(n-2)(n-3)m(m-1)}{n(n-1)(m-2)(m-3)}\right) \overline{cov(i,j)^2} \\ &+ 4(n-1)(n-2) \left(1 - \frac{n-3}{m-3}\right) E[cov(i,j)cov(i,k)] \\ &+ 4(n-1) \left(1 - \frac{n-2}{m-2}\right) E[\sigma_i^2 cov(i,j)] \\ &\left. - 2(n-1) \left(n - \frac{(n-2)m}{(m-2)}\right) \sigma^2 \overline{cov(i,j)} \right] \quad (2) \end{aligned}$$

mit

$E[\sigma_n^2]$	=	erwartete Renditevarianz eines Portfolios der Größe n
$\sigma^2(\sigma_n^2)$	=	Varianz der Renditevarianz eines Portfolios der Größe n
n	=	Anzahl der Wertpapiere im Portfolio
m	=	Anzahl der Wertpapiere im gesamten Sample
$\sigma_i^2$	=	Renditevarianz des Wertpapiers i
$\sigma_{\sigma_i^2}^2$	=	Varianz der Renditevarianz der einzelnen Wertpapiere im Wertpapiersample
$\frac{\sigma_{\sigma_i^2}^2}{\sigma^2}$	=	durchschnittliche Varianz im Wertpapiersample
$cov(i,j)$	=	Kovarianz zwischen Wertpapier i und Wertpapier j
$\overline{cov(i,j)}$	=	durchschnittliche Kovarianz zwischen allen Wertpapieren im Sample
$\overline{cov(i,j)^2}$	=	durchschnittliche quadrierte Kovarianz im Sample
$\frac{\overline{cov(i,j)^2}}{\overline{cov(i,j)}^2}$	=	quadrierte durchschnittliche Kovarianz im Sample.

---

<sup>6</sup> Vgl. Markowitz[1970], S. 111.

<sup>7</sup> Vgl. Elton/Gruber[1977], S. 419.

Bisher wurde nur das Risiko betrachtet, das aus Abweichung der Renditen von der erwarteten Portfoliorendite einer Portfoliogrößenklasse resultiert. Ein Investor, der in ein gleichgewichtetes Portfolio investiert beabsichtigt gerade die durchschnittliche Rendite der im Wertpapiersample enthaltenen Wertpapiere zu realisieren. Abhängig von der Portfoliogröße weicht aber die für die jeweilige Portfoliogrößenklasse erwartete Rendite von dieser Zielgröße unterschiedlich stark ab. Es existiert somit das zusätzliche Risiko, daß die durchschnittliche Portfoliorendite von der angestrebten durchschnittlichen Marktrendite<sup>8</sup> abweicht. Ein Risikomaß<sup>9</sup>, das beide Risiken berücksichtigt ist  $E[\sigma_{T_n}^2]$  definiert als:

$$E[\sigma_{T_n}^2] = E[\sigma_n^2] + \frac{1}{n} \left(1 - \frac{n-1}{m-1}\right) \sigma_{\bar{r}}^2 \quad (3)$$

mit

$E[\sigma_n^2]$	=	erwartete Renditevarianz eines Portfolios der Größe n
n	=	Anzahl der Wertpapiere im Portfolio
m	=	Anzahl der Wertpapiere im Sample
$\sigma_{\bar{r}}^2$	=	Varianz der erwarteten Rendite eines Wertpapiers um die erwartete Rendite aller Wertpapiere im Sample.

Diese dargestellten analytischen Lösungen für den Zusammenhang zwischen Portfoliogröße und Risiko bilden die methodische Grundlage der empirischen Studie. Ein solches Vorgehen liefert im Vergleich zu Simulationen nicht nur exakte Lösungen mit geringerem Rechenaufwand, sondern ermöglicht darüberhinaus die Analyse einzelner Einflußfaktoren auf das Portfoliorisiko<sup>10</sup>. Ausgehend von den bereinigten wöchentlichen Renditen werden die zur Berechnung der Risikomaße notwendigen Parameter für jede der 17 Teilperioden bestimmt. Alle weiteren Analysen basieren auf diesen Parametern, die in Tabelle 1 dargestellt sind.

---

<sup>8</sup>Die durchschnittliche Marktrendite entspricht dabei der durchschnittlichen Wertpapierrendite im betrachteten Wertpapiersample.

<sup>9</sup>Vgl. Elton/Gruber[1977], S. 420.

<sup>10</sup>Vgl. Elton/Gruber[1977], S. 416.

Tabelle 1:  
Parameterwerte

Periode	Zeitraum	$\sigma_{\sigma_i^2}^2 \times 10^6$	$\overline{cov(i, j)^2} \times 10^6$	$E[cov(i, j)cov(i, k)] \times 10^6$	$E[\sigma_i^2 cov(i, j)] \times 10^6$	$\overline{\sigma^2} \times 10^3$	$\overline{cov(i, j)} \times 10^3$	$\sigma_i^2 \times 10^3$
1	74-78	0.3633	0.0273	0.0191	0.1286	0.983	0.126	0.00263
2	75-79	0.4578	0.0213	0.0144	0.0987	0.903	0.109	0.00313
3	76-80	0.4647	0.0135	0.0083	0.0662	0.846	0.081	0.00396
4	77-81	0.5547	0.0133	0.0079	0.0697	0.898	0.079	0.00373
5	78-82	0.5786	0.0154	0.0091	0.0833	0.939	0.085	0.00342
6	79-83	0.7215	0.0222	0.0138	0.1213	1.057	0.105	0.00263
7	80-84	0.6097	0.0217	0.0134	0.1215	1.080	0.103	0.00336
8	81-85	0.6329	0.0249	0.0143	0.1359	1.195	0.106	0.00446
9	82-86	0.7578	0.0512	0.0321	0.2504	1.451	0.159	0.00562
10	83-87	0.9449	0.1223	0.0855	0.4860	1.684	0.259	0.00434
11	84-88	0.8500	0.1192	0.0812	0.4558	1.655	0.250	0.00286
12	85-89	0.8377	0.1408	0.0973	0.5373	1.770	0.276	0.00334
13	86-90	0.7199	0.2193	0.1580	0.7292	1.872	0.352	0.00523
14	87-91	0.5496	0.1817	0.1309	0.5919	1.680	0.319	0.00523
15	88-92	0.5608	0.1016	0.0680	0.3708	1.485	0.226	0.00505
16	89-93	0.7024	0.0988	0.0661	0.3774	1.506	0.223	0.00326
17	90-94	0.7789	0.0865	0.0551	0.3258	1.441	0.200	0.00297

### 3 Empirische Ergebnisse

#### 3.1 Portfoliorisiko

Abbildung 1 visualisiert die analytischen Ergebnisse. In Abhängigkeit von der betrachteten 5-Jahres-Periode und der Portfoliogröße (n) wird die erwartete Varianz der Portfoliorenditen ( $E[\sigma_n^2]$ ) dargestellt<sup>11</sup>. Deutlich erkennbar ist eine Risikoreduktion mit zunehmendem Portfolioumfang, die mit steigender Anzahl aufgenommener Wertpapiere abnimmt. Auch eine zeitliche Struktur ist sichtbar.

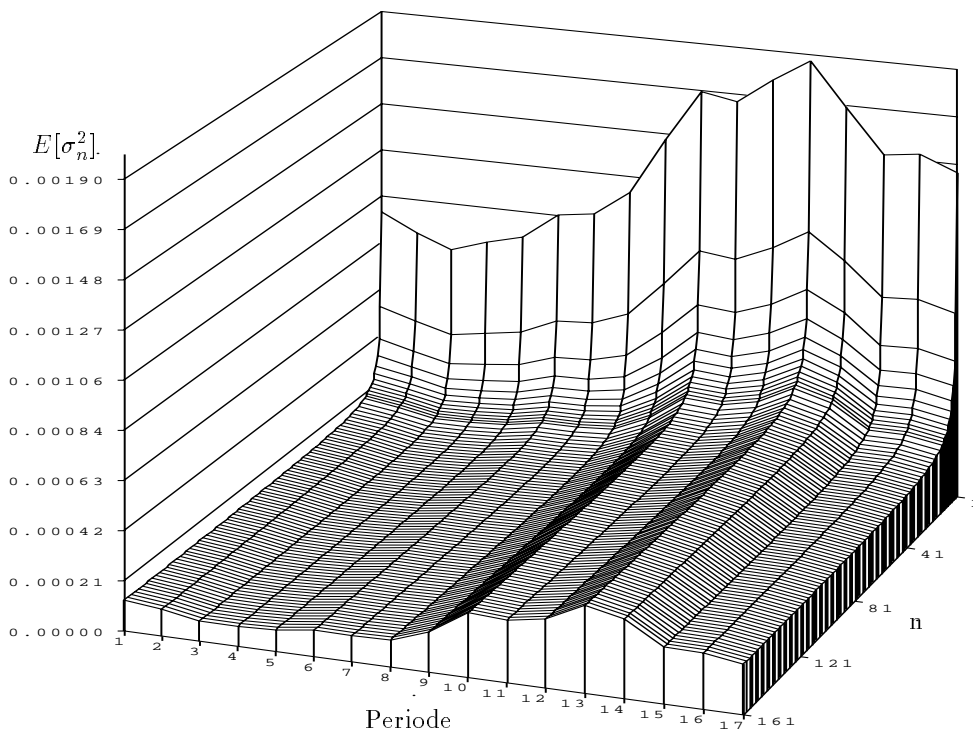


Abbildung 1:  
Erwartete Portfoliorenditen-Varianz

Ab Periode 9, d.h. mit dem Jahr 1986, ist eine Zunahme des durchschnittlichen Risikos einzelner Aktien auszumachen. In diesem erhöhten Risikoniveau spiegeln sich die Crashes der Jahre 1987, 1989 und 1991 wider. Eine Untersuchung der durchschnittlichen wöchentlichen Wertpapierrenditen zeigt, daß die gestiegene Volatilität nicht auf einen einzelnen starken positiven oder nega-

<sup>11</sup>Exakte Werte für ausgewählte Perioden und Portfoliogrößen finden sich in Tabelle 3 und Tabelle 4.

tiven Ausreißer<sup>12</sup>, sondern auf häufigere Realisierung von extremen Renditewerten sowohl im positiven als auch negativen Bereich zurückzuführen ist. So umfaßt die Periode von 1986 bis 1991 die 10 negativsten durchschnittlichen wöchentlichen Renditen gleichzeitig aber auch 7 der 10 positivsten<sup>13</sup>.

Betrachtet man die Portfolios, die das gesamte Sample umfassen, so drängt sich die Vermutung auf, daß nicht nur das Gesamtrisiko, sondern insbesondere der systematische Risikoanteil ab 1986 zunimmt. Im nächsten Abschnitt wird deshalb die Risikostruktur der Portfolios analysiert und der systematische bzw. unsystematische Risikoanteil quantifiziert.

## 3.2 Risikostruktur

Nach Markowitz läßt sich das Risiko von Wertpapierportfolios in einen systematischen, nicht-diversifizierbaren Teil ( $\sigma_s^2$ ) und einen unsystematischen diversifizierbaren Teil ( $\sigma_u^2$ ) aufspalten<sup>14</sup>. Formal gilt:

$$\sigma_s^2 = \overline{cov(i, j)} \quad (4)$$

$$\sigma_u^2 = \overline{\sigma^2} - \overline{cov(i, j)} \quad (5)$$

Das systematische Risiko ( $\sigma_s^2$ ) entspricht somit gerade der durchschnittlichen Kovarianz der Renditezeitreihen von jeweils zwei Wertpapieren des betrachteten Wertpapiersamples. Dieses Risiko läßt sich durch Diversifikation nicht weiter reduzieren. Die Differenz der durchschnittlichen Renditevarianz und dieser durchschnittlichen Kovarianz entspricht gerade dem durch Portfoliobildung diversifizierbaren Risikoanteil ( $\sigma_u^2$ ).  $\sigma_u^2$  stellt aber nicht nur ein absolutes Maß für das gesamte diversifizierbare Risiko dar, sondern ist auch ein Maß für die absolute Varianzreduktion bei Aufnahme eines zusätzlichen Wertpapiers. Die durchschnittliche Varianzreduktion bei Aufnahme eines zusätzlichen Wertpapiers in ein Portfolio mit n Wertpapieren beträgt  $\frac{1}{n(n+1)}\sigma_u^2$ . Ein Wertpapierportfolio bestehend aus nur einem Wertpapier hat eine erwartete Renditevarianz von  $\overline{\sigma^2}$ , ein perfekt<sup>15</sup> diversifiziertes Portfolio eine erwartete Renditevarianz von  $\sigma_s^2$ . Tabelle 2 enthält die empirischen Ergebnisse für die einzelnen Betrachtungsperioden. Der prozentuale Anteil des unsystematischen Risiko ( $\sigma_u^2/\overline{\sigma^2}$ ) wird gemessen als Anteil der diversifizierbaren Varianz an der Gesamtvarianz.

<sup>12</sup>Im Gegensatz zu durchschnittlichen täglichen Renditen, bei denen der 16. Oktober 1989 mit -10.5 % Ausreißercharakter besitzt, läßt sich bei den wöchentlichen Renditen kein derartiger Ausreißer finden (vgl. Anhang Tabelle A.2).

<sup>13</sup>Vgl. Anhang Tabelle A.2.

<sup>14</sup>Vgl. Markowitz[1970], S. 111. Dieser formale Zusammenhang wird auch als "the law of the average covariance" bezeichnet (vgl. Markowitz[1978], S. 49).

<sup>15</sup>Dies gilt strenggenommen nur für ein Portfolio mit unendlich vielen Wertpapieren.



Tabelle 2:  
Risikostruktur

Periode	Zeitraum	$\overline{\sigma^2}$	$\sigma_s^2$	$\sigma_u^2$	$\sigma_u^2/\overline{\sigma^2}$
1	74 - 78	0.000983	0.000126	0.000857	87.2 %
2	75 - 79	0.000903	0.000109	0.000795	88.0 %
3	76 - 80	0.000846	0.000081	0.000765	90.4 %
4	77 - 81	0.000898	0.000079	0.000819	91.2 %
5	78 - 82	0.000939	0.000085	0.000855	91.1 %
6	79 - 83	0.001057	0.000105	0.000952	90.1 %
7	80 - 84	0.001080	0.000103	0.000977	90.5 %
8	81 - 85	0.001195	0.000106	0.001089	91.1 %
9	82 - 86	0.001451	0.000159	0.001291	89.0 %
10	83 - 87	0.001684	0.000259	0.001425	84.6 %
11	84 - 88	0.001655	0.000250	0.001405	84.9 %
12	85 - 89	0.001770	0.000276	0.001494	84.4 %
13	86 - 90	0.001872	0.000352	0.001519	81.1 %
14	87 - 91	0.001680	0.000319	0.001361	81.0 %
15	88 - 92	0.001485	0.000226	0.001259	84.8 %
16	89 - 93	0.001506	0.000223	0.001282	85.1 %
17	90 - 94	0.001441	0.000200	0.001241	86.1 %

Die durchschnittliche Renditevarianz steigt von 0.000846 in Periode 3, stetig auf ein Maximum in Periode 13 in Höhe von 0.001872 an und verharrt dann auf recht hohem Niveau. Spaltet man die Varianz in den systematischen und unsystematischen Teil auf, so stellt man fest, daß sich im Durchschnitt über die 17 betrachteten Perioden 87% der Gesamtvarianz durch Diversifikation reduzieren läßt.

Ab 1987 ist eine deutliche Steigerung für  $\sigma_u^2$  von 0.000765 in Periode 3 auf 0.001519 in Periode 13 erkennbar. Dies zeigt auf, daß die erzielbare Risikoreduktion gemessen in absoluten Werten ab 1987 deutlich ansteigt. Im gleichen Zeitraum fällt aber der Anteil des diversifizierbaren Risikos an der Gesamtvarianz von über 90% auf 81% ab. In diesen Zahlen spiegelt sich das gestiegene systematische Marktrisiko wider. Betrachtet man die Extremwerte, so läßt sich beim systematischen Risiko eine Steigerung um 350% von Periode 4 zu Periode 13 beobachten, während das unsystematische Risiko von Periode 3 auf Periode 13 nur um knapp 100% anwächst.

Wie repräsentativ die aus dem Sample abgeleiteten Aussagen über das systematische Risiko sind, zeigt ein Vergleich des Risikos des gesamten Samples mit dem Risiko des DAFOX-GG<sup>16</sup>. Der Vergleich der Varianzen der wöchentlichen Renditen macht deutlich, daß das betrachtete Wertpapiersample das gesamte amtliche Marktsegment der Frankfurter Börse recht gut beschreibt (vgl. Anhang Tabelle A.1). Die beobachtete annähernde Verfünffachung des systematischen Risikos von Periode 4 zu Periode 13 zeigt sich auch in der Varianz der DAFOX-GG-Renditen.

### 3.3 Diversifikationseffekt

In der vorangegangenen Analyse wurden Risikomaße für die beiden Extrempositionen – völlige Diversifikation und völlig undiversifizierte Positionen – quantifiziert. Im weiteren wird untersucht, wie groß die Diversifikationswirkung in den Portfolios unterschiedlicher Größe empirisch tatsächlich ist<sup>17</sup>. Exakte Werte für ausgewählte Portfoliogrößen und Perioden sind in den Tabellen 3 und 4 dargestellt. Aus den Tabellenwerten ist ersichtlich, daß die größte absolute Risikoreduktion schon in Portfolios geringer Größe auftritt und die Streuung der Renditevarianz sich noch stärker als die erwartete Varianz mit zunehmender Portfoliogröße reduziert. Ein Vergleich von  $E[\sigma_n^2]$  und  $E[\sigma_{T_n}^2]$  zeigt, daß sich beide Risikomaße nur unwesentlich<sup>18</sup> unterscheiden.

Tabelle 5 gibt darüber Auskunft, wieviele Wertpapiere man in den verschiedenen Teilperioden durchschnittlich benötigt, um einen bestimmten Anteil des Gesamtrisikos zu reduzieren. Die Risikoreduktion wird durch den Anteil der erwarteten Varianz im Vergleich zur durchschnittlichen Renditevarianz eines einzelnen Wertpapiers gemessen.  $1 - E[\sigma_n^2]/E[\sigma_1^2]$  bzw.  $1 - E[\sigma_{T_n}^2]/E[\sigma_{T_1}^2]$ . 80% bedeutet also, daß durchschnittlich nur noch 20% des durchschnittlichen Risikos eines einzelnen Wertpapiers im jeweiligen Portfolio enthalten ist. Weichen die Portfoliogrößen für beide Risikokennzahlen voneinander ab, so werden die Werte für  $E[\sigma_{T_n}^2]$  in Klammern dargestellt.

In allen Perioden reicht ein Portfolio, bestehend aus 4 Wertpapieren durchschnittlich aus, um 60% des Portfoliorisikos zu reduzieren. Im Zeitablauf zeigen sich erst bei einer Risikoreduzierung um mehr als 70% deutliche Unterschiede bzgl. der Anzahl der benötigten Wertpapiere zwischen den verschiedenen Perioden. So schwankt die notwendige Portfoliogröße bei einer Risikoreduzierung um 70% zwischen 5 – 8, bei 75% zwischen 6 – 14 und bei 80% zwischen 9 – 80 benötigten Wertpapieren. Nur in den ersten 9 Perioden und in der letzten Periode ist überhaupt eine Risikoreduktion um mehr als

---

<sup>16</sup>Vgl. Göppl/Schütz[1994].

<sup>17</sup>Theoretische Betrachtungen finden sich beispielsweise in Bierman[1978], S. 30f. oder Bierman[1980], S42f.

<sup>18</sup>Die prozentuale Abweichung beträgt weniger als 0.5%.

Tabelle 3:  
Diversifikationswirkung I

1974-1978				
N	$E[\sigma_n^2]$	$E[\sigma_{T_n}^2]$	$\sigma^2(\sigma_n^2) \times 10^6$	$\sigma(\sigma_n^2)/E[\sigma_n^2]$
1	0.0009827	0.0009853	0.363347	0.613
2	0.0005543	0.0005556	0.050403	0.405
3	0.0004115	0.0004124	0.017351	0.320
4	0.0003401	0.0003407	0.008729	0.275
6	0.0002687	0.0002691	0.003758	0.228
8	0.0002330	0.0002333	0.002263	0.204
10	0.0002116	0.0002118	0.001595	0.189
12	0.0001973	0.0001975	0.001225	0.177
14	0.0001871	0.0001873	0.000992	0.168
20	0.0001688	0.0001689	0.000623	0.148
40	0.0001473	0.0001474	0.000254	0.108
60	0.0001402	0.0001402	0.000140	0.084
80	0.0001366	0.0001366	0.000084	0.067
100	0.0001345	0.0001345	0.000050	0.053
161	0.0001312	0.0001312	0.000000	0.000
1982-1986				
N	$E[\sigma_n^2]$	$E[\sigma_{T_n}^2]$	$\sigma^2(\sigma_n^2) \times 10^6$	$\sigma(\sigma_n^2)/E[\sigma_n^2]$
1	0.0014508	0.0014564	0.757842	0.600
2	0.0008051	0.0008078	0.110217	0.412
3	0.0005898	0.0005917	0.039187	0.336
4	0.0004822	0.0004836	0.020090	0.294
6	0.0003746	0.0003755	0.008756	0.250
8	0.0003208	0.0003214	0.005254	0.226
10	0.0002885	0.0002890	0.003674	0.210
12	0.0002670	0.0002674	0.002798	0.198
14	0.0002516	0.0002519	0.002246	0.188
20	0.0002239	0.0002242	0.001385	0.166
40	0.0001916	0.0001917	0.000548	0.122
60	0.0001809	0.0001809	0.000298	0.095
80	0.0001755	0.0001755	0.000178	0.076
100	0.0001722	0.0001723	0.000106	0.060
161	0.0001674	0.0001674	0.000000	0.000

Tabelle 4:  
Diversifikationswirkung II

1983-1987				
N	$E[\sigma_n^2]$	$E[\sigma_{T_n}^2]$	$\sigma^2(\sigma_n^2) \times 10^6$	$\sigma(\sigma_n^2)/E[\sigma_n^2]$
1	0.0016837	0.0016881	0.944854	0.577
2	0.0009715	0.0009736	0.155876	0.406
3	0.0007341	0.0007355	0.062700	0.341
4	0.0006154	0.0006164	0.035621	0.307
6	0.0004966	0.0004973	0.017893	0.269
8	0.0004373	0.0004378	0.011680	0.247
10	0.0004017	0.0004021	0.008603	0.231
12	0.0003779	0.0003783	0.006778	0.218
14	0.0003610	0.0003613	0.005570	0.207
20	0.0003305	0.0003306	0.003569	0.181
40	0.0002948	0.0002949	0.001463	0.130
60	0.0002830	0.0002830	0.000804	0.100
80	0.0002770	0.0002771	0.000481	0.079
100	0.0002735	0.0002735	0.000289	0.062
161	0.0002681	0.0002681	0.000000	0.000
1990-1994				
N	$E[\sigma_n^2]$	$E[\sigma_{T_n}^2]$	$\sigma^2(\sigma_n^2) \times 10^6$	$\sigma(\sigma_n^2)/E[\sigma_n^2]$
1	0.0014408	0.0014438	0.778942	0.613
2	0.0008202	0.0008216	0.127564	0.435
3	0.0006133	0.0006143	0.051203	0.369
4	0.0005099	0.0005106	0.029102	0.335
6	0.0004064	0.0004069	0.014664	0.298
8	0.0003547	0.0003551	0.009602	0.276
10	0.0003237	0.0003240	0.007091	0.260
12	0.0003030	0.0003032	0.005597	0.247
14	0.0002882	0.0002884	0.004607	0.235
20	0.0002616	0.0002617	0.002961	0.208
40	0.0002306	0.0002306	0.001219	0.151
60	0.0002202	0.0002203	0.000670	0.118
80	0.0002151	0.0002151	0.000401	0.093
100	0.0002120	0.0002120	0.000241	0.073
161	0.0002073	0.0002073	0.000000	0.000

Tabelle 5:  
Portfoliogröße und Risikoreduktion I

Periode	Zeitraum	50%	60%	70%	75%	80%	85%	90%
1	74-78	3	4	6	8	13	40	
2	75-79	3	4	5	7	12 (11)	30	
3	76-80	3	3	5	6	9	17	
4	77-81	3	3	5	6	9	15	75 (73)
5	78-82	3	3	5	6	9	16	95 (92)
6	79-83	3	3	5	6	9	18	
7	80-84	3	3	5	6	9	17	
8	81-85	3	3	5	6	9	15	79 (77)
9	82-86	3	4	5	7	10	23 (22)	
10	83-87	3	4	6	9	19		
11	84-88	3	4	6	9	18		
12	85-89	3	4	6	9	20 (19)		
13	86-90	3	4	8	14	69 (66)		
14	87-91	3	4	8	14	80 (75)		
15	88-92	3	4	6	9	18		
16	89-93	3	4	6	9	17		
17	90-94	3	4	6	8	15 (14)	75 (74)	

85% möglich, nur in 3 der 17 Perioden kann das Gesamtrisiko durch Portfoliobildung auf unter 10% des ursprünglichen Niveaus reduziert werden.

In Tabelle 5 wird als Benchmark die innerhalb des Wertpapiersamples maximal erzielbare Risikoreduktion verwendet. Das heißt als Vergleichsmaßstab dient das Risiko eines Portfolios bestehend aus allen Wertpapieren. Im Vergleich zu einem solchen Portfolio beinhaltet ein Portfolio mit 14 Wertpapieren, abhängig von der jeweiligen Periode, ein zwischen 27% und 63% höheres Risiko<sup>19</sup>.

Die analytischen Ergebnisse stimmen somit mit den Ergebnissen früherer Studien überein. Portfolios zwischen 8 und 14 Wertpapieren reichen in jeder Periode aus, um durchschnittlich 75% des ursprünglichen Risikos zu eliminieren. Risikoreduzierende Wirkung über dieses Niveau hinaus können zwar erzielt werden, in neuerer Zeit aber maximal um weitere 10%<sup>20</sup>. Hierzu müssen aber abhängig von der Periode zwischen 9 und 66 Wertpapiere zusätzlich in das Portfolio aufgenommen werden. Wie auch bei vorangegangenen Studien ergeben sich in Abhängigkeit der Definition einer ökonomischen Risikoreduktion unterschiedliche Ergebnisse<sup>21</sup>. Während Untersuchungen, die als

<sup>19</sup>Gemessen als  $E[\sigma_{14}^2]/E[\sigma_{161}^2]$  bzw.  $E[\sigma_{T_{14}}^2]/E[\sigma_{T_{161}}^2]$ .

<sup>20</sup>Auch in Periode 17 ist innerhalb des Samples nur eine Risikoreduktion um maximal 10.6% möglich.

<sup>21</sup>Die Überprüfung der statistischen Signifikanz der risikoreduzierenden Wirkung (vgl. z.B. Evans/Archer[1968], S. 766) macht in dieser Studie wenig Sinn, da die exakten

Tabelle 6:  
Portfoliogröße und Risikoreduktion II

Periode	Zeitraum	$E[\sigma_{14}^2]/E[\sigma_{161}^2]$	$E[\sigma_{T_{14}}^2]/E[\sigma_{T_{161}}^2]$
1	74-78	143%	143%
2	75-79	146%	146%
3	76-80	158%	159%
4	77-81	164%	164%
5	78-82	162%	162%
6	79-83	156%	156%
7	80-84	158%	158%
8	81-85	163%	163%
9	82-86	150%	151%
10	83-87	135%	135%
11	84-88	136%	136%
12	85-89	134%	134%
13	86-90	127%	128%
14	87-91	127%	127%
15	88-92	135%	135%
16	89-93	136%	136%
17	90-94	139%	139%

Benchmark das gesamte durchschnittliche Portfoliorisiko verwenden, signifikante Risikoreduktionen nur bis zu einer Portfoliogröße von 14 Wertpapieren feststellen<sup>22</sup>, finden Untersuchungen, die als Maßstab nur das systematische Risiko verwenden, auch in umfangreicheren Portfolios noch ökonomisch signifikante Risikoreduktionen<sup>23</sup>.

Tendenziell stellt man im Zeitablauf eine Zunahme der notwendigen Portfoliogröße und eine Reduktion des diversifizierbaren Risikoanteils fest. Auch hier spiegelt sich die reduzierte relative Effektivität der Diversifikationswirkung wider. Wird  $E[\sigma_{T_n}^2]$  anstelle von  $E[\sigma_n^2]$  als Risikomaß verwendet, so ergeben sich nur unwesentlich andere Ergebnisse<sup>24</sup>.

### 3.4 Streuung der Risikomaße

Bisher wurden nur die für eine bestimmte Portfoliogröße erwartete Varianz betrachtet. Elton/Gruber<sup>25</sup> und Tole<sup>26</sup> weisen daraufhin, daß für einen In-

---

analytischen Lösungen für den Erwartungswert und die Varianz der Portfoliorenditenvarianz in Abhängigkeit der Portfoliogröße verwendet werden.

<sup>22</sup>Vgl. beispielsweise Evans/Archer[1968], S. 766, Klemkosky/Martin[1975], S. 151f.

<sup>23</sup>Vgl. beispielsweise Elton/Gruber[1977], S. 426, Bird/Tippett[1988], S. 249f.

<sup>24</sup>Vgl. Tabelle 1, Tabelle 3 und Tabelle 4.

<sup>25</sup>Vgl. Elton/Gruber[1977], S. 419.

<sup>26</sup>Vgl. Tole[1982], S. 8.

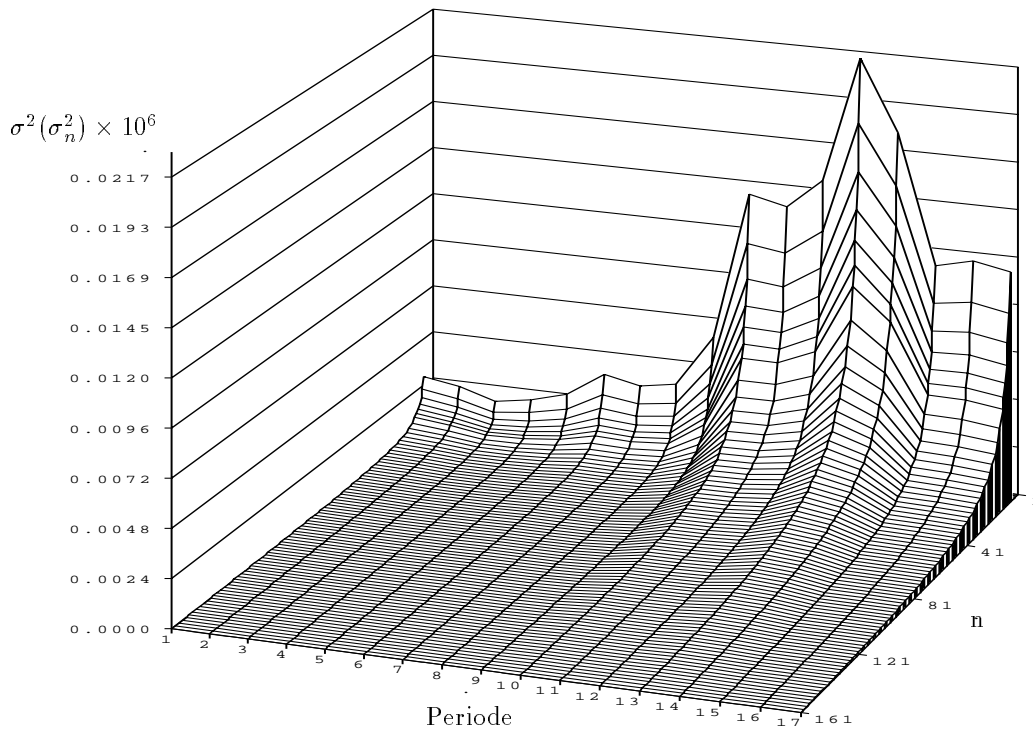


Abbildung 2:  
 Varianz der Portfoliorenditen-Varianz<sup>28</sup>

vestor nicht nur der Erwartungswert eine entscheidungsrelevante Größe darstellt, sondern ebenso die Streuung der Varianz innerhalb einer Größenklasse. Dies ist um so mehr interessant, als Poon, Taylor und Ward<sup>27</sup> zum Ergebnis kommen, daß Portfoliovarianzen mit steigender Portfoliogröße approximativ normalverteilt sind und somit die Varianz der Portfoliorenditen für eine Portfoliogrößeklasse vollständig durch den Erwartungswert und die Varianz beschrieben werden kann.

Abbildung 2 stellt diese Streuung für jede Periode in Abhängigkeit von der Portfoliogröße dar. Die Abbildung weist eine ähnliche Struktur wie Abbildung 1 auf. Augenfällig ist aber, daß sich die Streuungswerte mit zunehmender Portfoliogröße erheblich schneller reduzieren (vgl. auch Tabellen 3 und 4) und bei Portfolios, die das gesamte Portfolio umfassen, auf null sinkt.

Wie auch bei der erwarteten Varianz tritt bei der Streuung der Varianz ab 1986 eine deutliche Erhöhung ein. Dieser Effekt verschwindet, wenn man anstelle der absoluten quadratischen Abweichung die relative Abweichung in

<sup>27</sup>Vgl. Poon/Taylor/Ward[1992], S. 98.

<sup>28</sup>Aus darstellungstechnischen Gründen sind in der Graphik nur Werte für Portfolios mit mehr als 6 Wertpapieren enthalten.

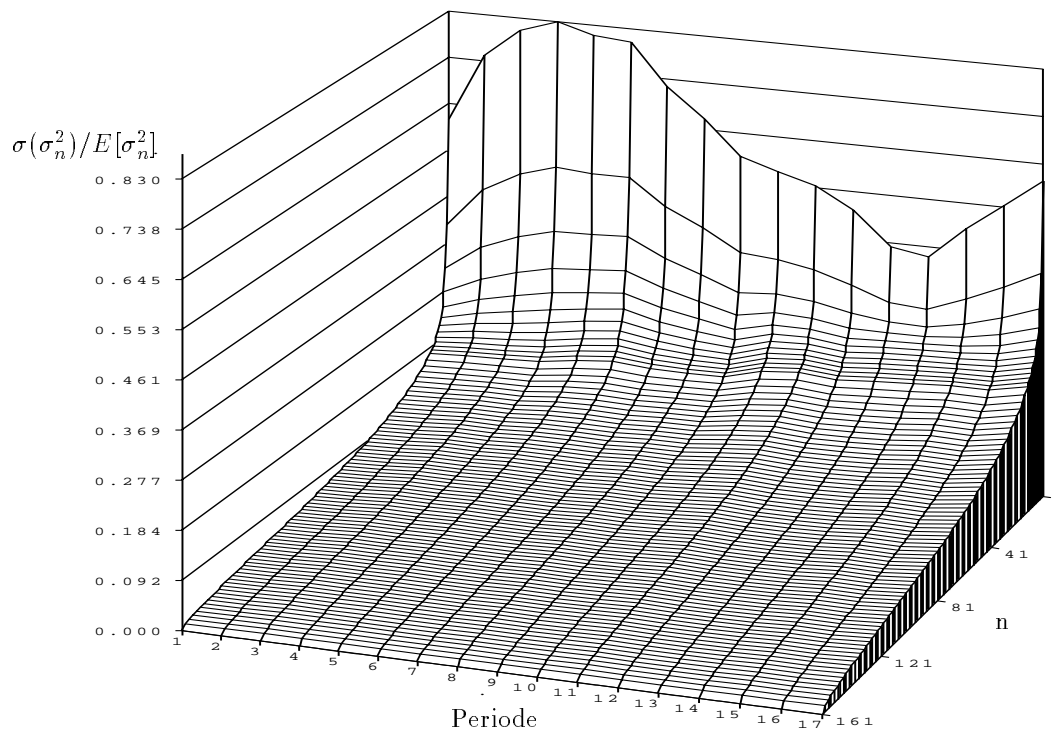


Abbildung 3:  
Variationskoeffizient der Portfoliorenditen-Varianz

Form des Variationskoeffizienten<sup>29</sup> (vgl. Abbildung 3) betrachtet. Allerdings stellt man im Zeitablauf für Portfolios ab 7 Wertpapieren ein monotones Anwachsen<sup>30</sup> des Variationskoeffizienten fest. Bei kleineren Portfolios zeigt sich bemerkenswerterweise der umgekehrte Effekt. Abbildung 4 stellt diese monotone Niveauerhöhung um mehr als 38% von Periode 1 auf Periode 17 dar. Wie man sieht, tritt dieser Effekt durchgehend bei allen Portfoliogrößenklassen mit mehr als 7 Wertpapieren auf.

Die Ursache für diese Niveauerhöhung von Periode zu Periode läßt sich größtenteils auf ein im Zeitablauf auftretendes relatives<sup>31</sup> Anwachsen von  $E[cov(i, j)cov(i, k)]$  zurückführen. Insbesondere die Veränderung des Variationskoeffizienten im Gesamtzeitraum, d.h. bei ausschließlicher Betrachtung von Periode 1 und Periode 17, erklärt sich fast vollständig aus der annähernden Verdreifachung von  $E[cov(i, j)cov(i, k)]$ . Eine ökonomische Interpretation dieses Phänomens ist schwierig und bedarf weiterer Untersuchungen. Eine

<sup>29</sup>Definiert als  $\sqrt{\sigma^2(\sigma^2)}/E(\sigma_n^2)$ .

<sup>30</sup>Abhängig von der Portfoliogrößenklasse ergibt sich ein Spearmanscher Rangkorrelationskoeffizient zwischen 91% und 98%.

<sup>31</sup>Normiert durch die erwartete Varianz.



mögliche Erklärung wäre beispielsweise, daß sich darin wachsende Konzentrationstendenzen bei den betrachteten Aktiengesellschaften widerspiegeln. Eine solche zunehmende Verflechtung der Unternehmen wäre auch eine plausible Erklärung für das im Zeitablauf gestiegene systematische Risiko.

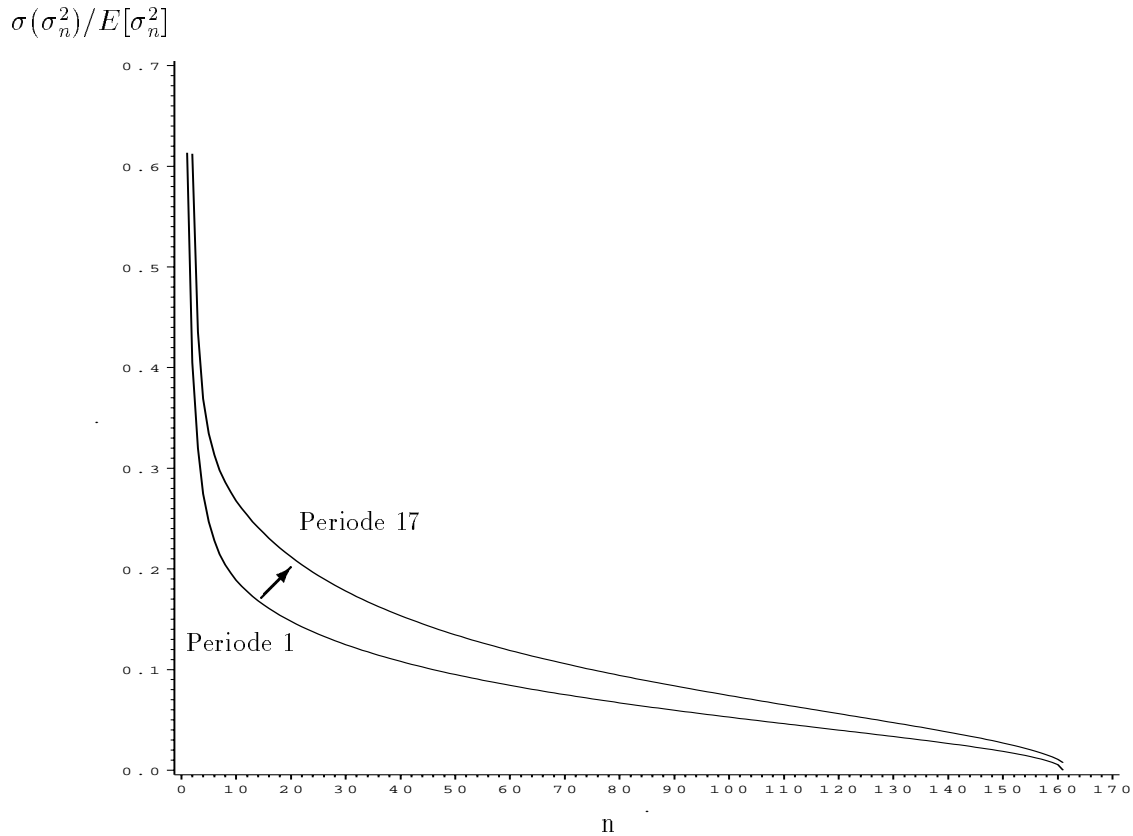


Abbildung 4:  
Entwicklung des Variationskoeffizienten von Periode 1 zur Periode 17

## 4 Zusammenfassung

In der Untersuchung wurde deutlich, daß die naive Diversifikation eine geeignete Methode ist, um das Risiko von Aktienanlagen zu reduzieren. Im betrachteten Zeitraum zwischen 1974 und 1994 läßt sich tendenziell ein Anstieg des Risikos für Aktienportfolios feststellen. Bei der Analyse der Risikostruktur stellt man fest, daß das unsystematische diversifizierbare Risiko vom Betrachtungszeitraum 1977/1981 auf 1986/1990 sich innerhalb von neun Jahren

fast verdoppelt hat, wohingegen sich das systematische, nicht-diversifizierbare Risiko mehr als vervierfacht. Hieraus resultiert eine Reduktion des relativen diversifizierbaren Risikoanteils.

Bei der Anzahl für eine relative Risikoreduzierung minimal notwendigen Wertpapiere ergeben sich erst bei einer Risikoreduzierung um mehr als 70% deutliche Unterschiede zwischen den verschiedenen Perioden. Konform mit den Ergebnissen früherer Studien erweist sich ein Portfolio, bestehend aus 14 Wertpapieren, in jeder Periode als ausreichend, um mehr als 75% des Portfoliorisikos zu eliminieren. Gleichzeitig beinhaltet ein solches Portfolio, abhängig von der jeweiligen Periode, ein im Vergleich zu einem das gesamte Sample umfassenden Portfolio ein zwischen 27% und 63% höheres Risiko. Die Betrachtung von  $E[\sigma_{T_n}^2]$  an Stelle von  $E[\sigma_n^2]$  hat dabei nur unwesentlichen Einfluß auf die Ergebnisse.

Neben den Erwartungswerten ist auch die Streuung der Varianz innerhalb einer Portfoliogrößenklasse von Interesse. Wie auch der Erwartungswert der Varianz steigt die absolute Streuung im Zeitablauf tendenziell an. Betrachtet man die relative Streuung in Form des Variationskoeffizienten, so ergibt sich für Portfolios ab 7 Wertpapieren ein monotonen Anwachsen im Zeitablauf. Innerhalb der betrachteten 17 Teilperioden steigt der Variationskoeffizient monoton um insgesamt 40% an.

Die Optimalität der Portfoliogröße hängt von der jeweiligen Präferenz des Investors ab, d.h. welchen Preis er in Form von erhöhten Transaktionskosten und erhöhtem Managementaufwand bereit ist, für eine Risikoreduktion zu bezahlen. Die vorliegende Untersuchung leistet einen Beitrag zur Problemlösung, da sie die erzielbare Risikoreduktion für verschiedene Portfoliogrößen und Zeitperioden quantifiziert. Inwieweit die empirischen Ergebnisse praktische Relevanz für einen bestimmten Investor haben, bleibt weiteren Untersuchungen, die explizit dessen spezifische Restriktionen wie z.B. legislative Anlagerestriktionen, Liquiditätsgesichtspunkte und sonstigen Anlagemöglichkeiten berücksichtigen, vorbehalten.

# Appendix

Tabelle A.1:  
Renditevarianz  
Sample versus DAFOX-GG

Periode	Zeitraum	Sample	DAFOX-GG
1	74-78	0.000131	0.000118
2	75-79	0.000114	0.000106
3	76-80	0.000086	0.000079
4	77-81	0.000084	0.000079
5	78-82	0.000090	0.000085
6	79-83	0.000111	0.000108
7	80-84	0.000109	0.000110
8	81-85	0.000112	0.000116
9	82-86	0.000167	0.000172
10	83-87	0.000268	0.000293
11	84-88	0.000258	0.000292
12	85-89	0.000285	0.000322
13	86-90	0.000362	0.000404
14	87-91	0.000327	0.000376
15	88-92	0.000234	0.000271
16	89-93	0.000231	0.000267
17	90-94	0.000207	0.000238

Tabelle A.2:  
Extreme durchschnittliche Renditen

Wöchentliche Renditen			
Datum	Ø Rendite	Datum	Ø Rendite
11.11.87	- 0.088	26.02.75	0.055
28.10.87	- 0.082	17.11.87	0.046
26.09.90	- 0.068	08.01.86	0.046
22.08.90	- 0.066	13.08.86	0.043
21.10.87	- 0.063	28.08.91	0.040
18.10.89	- 0.060	15.11.89	0.036
08.08.90	- 0.058	02.10.90	0.035
14.05.86	- 0.039	12.02.75	0.034
19.09.90	- 0.039	15.01.86	0.034
04.11.87	- 0.037	22.09.82	0.034

Tägliche Renditen			
Datum	Ø Rendite	Datum	Ø Rendite
16.10.89	- 0.105	17.10.89	0.046
19.08.91	- 0.065	12.11.87	0.032
10.11.87	- 0.049	17.01.91	0.031
29.10.87	- 0.045	30.10.87	0.030
20.10.87	- 0.041	21.10.87	0.029
19.10.87	- 0.034	27.08.90	0.027
26.10.87	- 0.032	22.08.91	0.024
09.11.87	- 0.031	18.01.88	0.024
28.10.87	- 0.029	07.03.83	0.023
06.08.90	- 0.028	01.12.89	0.023

## Literatur

- [1] **Allen, D. E. / Sugianto, R. (1993)** *Australian Domestic Portfolio Diversification and Estimation Risk: A Review of Investment Strategies*. Working Paper 93.14, Curtin University of Technology School of Economics and Finance, Juli 1993.
- [2] **Bierman H. Jr. (1978 )** *Diversification: Is there safety in numbers?* The Journal of Portfolio Management, Fall 1978, S. 29-32.
- [3] **Bierman H. Jr. (1980)** *How much diversification is desirable?* The Journal of Portfolio Management, Fall 1980, S. 42-44.
- [4] **Bird R. / Tippett, M. (1986)** *Naive Diversification and Portfolio Risk – A Note*. Management Science, Vol. 32, No. 2, Februar 1986, S. 244-251.
- [5] **Bühler, W. / Göppl, H. / Möller, H.-P. und Mitarbeiter (1993)** *Die deutsche Finanzdatenbank*. Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung, Sonderheft 31, 1993, S. 287-333.
- [6] **Elton, E. J. / Gruber M. J. (1977)** *Risk Reduction and Portfolio Size: An Analytical Solution*. The Journal of Business, Vol. 50, Oktober 1977, S. 415-437.
- [7] **Evans, J. L. / Archer St. H. (1968)** *Diversification and the Reduction of Dispersion: An Empirical Analysis*. The Journal of Finance, Vol. 23, Dezember 1968, S. 761-767.
- [8] **Fisher, L. / Lorie J. H. (1970)** *Some Studies of Variability of Returns on Investments in Common Stocks*. The Journal of Business, Vol. 43, No.2, April 1970, S. 99-134.
- [9] **Göppl, H. / Schütz, H. (1994)** *Die Konzeption eines Deutschen Aktienindex für Forschungszwecke (DAFOX)*. Universität Karlsruhe, Institut für Entscheidungstheorie und Unternehmensforschung, Diskussionspapier Nr. 162.
- [10] **Keeding, H. (1976)** *Analyse der Diversifikationswirkungen in Aktienportfolios*. Dissertation, Berlin 1976.
- [11] **Klemkosky, R.C. / Martin J. D. (1975)** *The Effect of Market Risk on Portfolio Diversification*. The Journal of Finance, Vol. 30, No.1, März 1975, S. 147-154.
- [12] **Markowitz, H. (1952)** *Portfolio Selection*. The Journal of Finance, Vol. 7, No. 1, März 1952, S. 151-158.

- [13] **Markowitz, H. (1970)** *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*. 2. Aufl., Yale University Press, New Haven, London 1970.
- [14] **Markowitz, H. (1978)** *Markowitz Revisited*. Financial Analysts Journal, Sep.-Oct. 1976, S. 47-52.
- [15] **Poon S. / Taylor, S. J. / Ward C. W. R. (1992)** *Portfolio Diversification: A Pictorial Analysis of the UK Stock Market*. The Journal of Business, Finance & Accounting, Vol. 19, No.1, Januar 1992, S. 87-101.
- [16] **Sauer, A. (1991)** *Die Bereinigung von Aktienkursen – Ein kurzer Überblick über Konzepte und praktische Umsetzung*. Institut für Entscheidungstheorie und Unternehmensforschung, Universität Karlsruhe, Karlsruhe, 1991.
- [17] **Tole T. M. (1982)** *You can't Diversify without Diversifying*. The Journal of Portfolio Management, Winter 1982, S. 5-11.
- [18] **Wagner, W. H. / Lau, S. C. (1971)** *The Effect of Diversification on Risk*. Financial Analysts Journal, Nov.-Dez. 1971, S. 48-53.